1.- Dada la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} + e^3, & x \le 0 \\ (1 - x)^{a/x}, & x > 0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) (1 punto) Determina los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la función f(x) sea continua en R.
b) (1 punto) Calcula, para a = 1, la recta tangente a la función en x = -4.

Solución

Dada la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} + e^3, & x \le 0 \\ (1 - x)^{a/x}, & x > 0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$.

(a)
Determina los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la función f(x) sea continua en R.

Como la función f es continua en R, también lo es en x = 0.

Como es continua en x = 0 , $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(\sqrt{-x} + e^3) = \sqrt{-(0^-)} + e^3 = e^3$. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(1 - x)^{a/x} = \{1^{+\infty}$, Indeterminación del nº "e"$\}$ =

$= e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{a}{x}\cdot(1 - x - 1)} = e^{\lim_{x\to 0^+} a} = e^a$. Igualando tenemos $e^3 = e^3$, de donde **a = 3**.

(b)
Calcula, para a = 1, la recta tangente a la función en x = -4.

Como x = -4 está en la rama $x \le 0$, tenemos $f(x) = \sqrt{-x} + e^3$; $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x}}$

La recta tangente en x = -4 es "y - f(-4) = f '(-4)(x - (-4))".

Tenemos $f(-4) = \sqrt{-(-4)} + e^3 = \sqrt{4} + e^3 = 2 + e^3$ y $f'(-4) = \frac{-1}{2\sqrt{-(-4)}} = \frac{-1}{2\sqrt{4}} = \frac{-1}{4}$

Luego **la recta tangente en x = -4 es "y - (2 + e³) = (-1/4)·(x + 4)".**

2.- Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2 - 2} - (\sqrt{3}x + 5)\right]$.

Solución

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2 - 2} - (\sqrt{3}x + 5)\right] = \left\{\infty - \infty, \begin{matrix}\text{Técnica de la}\\ \text{conjugada}\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2 - 2} - (\sqrt{3}x + 5)\right)\cdot\left(\sqrt{3x^2 - 2} + (\sqrt{3}x + 5)\right)}{\sqrt{3x^2 - 2} + (\sqrt{3}x + 5)} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Suma por}\\ \text{diferencia}\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2 - 2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}x + 5\right)^2}{\sqrt{3x^2 - 2} + (\sqrt{3}x + 5)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2 - (3x^2 + 10\sqrt{3}x + 25)}{\sqrt{3x^2 - 2} + (\sqrt{3}x + 5)} = \left\{\begin{matrix}\text{Simplifico}\\ \text{numerador}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-10\sqrt{3}x - 27}{\sqrt{3x^2 - 2} + (\sqrt{3}x + 5)} = \left\{\begin{matrix}\text{Técnica del}\\ \text{cociente (TC)}\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-10\sqrt{3}x}{\sqrt{3}x + \sqrt{3}x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-10\sqrt{3}x}{2\cdot\sqrt{3}x} = \lim_{x\to+\infty}(-5) = -5.$$

3.- Calcula $\int e^{-x}(x^2 - 1)dx$.

Solución

$$\int e^{-x}\cdot(x^2 - 1)\cdot dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}\end{matrix}\right\} = (x^2 - 1)\cdot(-e^{-x}) - \int -e^{-x}\cdot 2xdx = -(x^2 - 1)\cdot e^{-x} + 2\int x\cdot e^{-x}dx = -(x^2 - 1)\cdot e^{-x} + 2\cdot I_1$$

$$I_1 = \int x\cdot e^{-x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}\end{matrix}\right\} = x\cdot(-e^{-x}) - \int -e^{-x}dx = -x\cdot e^{-x} + \int e^{-x}dx = -x\cdot e^{-x} - e^{-x}$$

Luego $\int e^{-x}(x^2 - 1)dx = -(x^2 - 1)\cdot e^{-x} + 2\cdot I_1 = -(x^2 - 1)\cdot e^{-x} + 2\cdot(-x\cdot e^{-x} - e^{-x}) + K =$

$= -x^2\cdot e^{-x} + e^{-x} - 2\cdot x\cdot e^{-x} - 2e^{-x} + K = -x^2\cdot e^{-x} - 2\cdot x\cdot e^{-x} - e^{-x} + K$

4.- Para la siguiente función: $f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x^2}$.

a) (1 punto) Obtén el dominio de definición y estudia su crecimiento y decrecimiento.
b) (1 punto) Analiza la curvatura (concavidad = ∩ y convexidad = U) y existencia de puntos de inflexión en su dominio de definición. Obtén los puntos de inflexión caso de existir.

Solución

(a)

Obtén el dominio de definición y estudia su crecimiento y decrecimiento.

El dominio de f es R – {0}

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x)

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2};\ f'(x) = \frac{2(x-1)\cdot x^2 - (x-1)^2\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2x^3-2x^2-2x\cdot(x^2-2x+1)}{x^4} = \frac{2x^3-2x^2-2x^3+4x^2-2x}{x^4} = \frac{2x^2-2x}{x^4}.$$

Si f '(x) = 0 → $2x^2 - 2x = 0 = 2x\cdot(x-1) = 0$, de donde x = 0 (**f no está definida en x = 0**) y x = 1, que serán los posibles extremos relativos.

Como f '(-1) = 4/(+) > 0, **luego f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (-∞, 0).**

Como f '(0'5) = (-0'5)/(+) < 0, **luego f(x) es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (0, 1).**

Como f '(2) = (4)/(+) > 0, **luego f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (1, +∞)**.

En x = 0 hay una asíntota vertical.

Por definición en x = 1 hay un mínimo relativo que vale f(1) = 0/(1) = 0.

(b)

Analiza la curvatura (concavidad = ∩ y convexidad = U) y existencia de puntos de inflexión en su dominio de definición. Obtén los puntos de inflexión caso de existir.

Sabemos que la curvatura es el estudio de la 2ª derivada.

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2};\ f'(x) = \frac{2x^2-2x}{x^4};\ f''(x) = \frac{(4x-2)\cdot x^4 - (2x^2-2x)\cdot 4x^3}{(x^4)^2} = \frac{4x^5-2x^4-8x^5+8x^4}{x^8} = \frac{-4x^5+6x^4}{x^8}.$$

De f ''(x) = 0, tenemos $-4x^5 + 6x^4 = 0 = 2x^4\cdot(-2x+3) = 0$, de donde x = 0 (**f no está definida en x = 0**) y x = 3/2 =

= 1'5 que será el posible punto de inflexión.

Como f ''(-1) = (10)/(+) > 0, **f es convexa (∪) en (-∞, 0).**

Como f ''(1) = (2)/(+) > 0**, f es convexa (∪) en (0, 1'5).**

Como f ''(2) = (-32)/(+) < 0, **f es cóncava (∩) en (1'5, +∞).**

En x = 0 hay una asíntota vertical.

Por definición **x = 1'5 es punto de inflexión y vale f(1'5) = 1/9 ≅ 0'11111.**

5.- Dada la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $AX - 2I = A^2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (1 punto) Analiza el rango de la matriz A - mB, según los valores de m ∈ R, siendo A la matriz del apartado anterior y $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución

Dada la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a)

Resuelve la ecuación matricial $AX - 2I = A^2$, donde I es la matriz identidad de orden 3

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila $= -(1)\cdot(0+1) = -1 \neq 0$, existe $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A^t)$.

De $AX - 2I = A^2 \rightarrow AX = 2I + A^2$. Multiplicando por la izquierda por A^{-1} la expresión $AX = 2I + A^2$ tenemos: $A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot 2I + A^{-1}\cdot A^2 \rightarrow I\cdot X = 2A^{-1} + A$, luego $\mathbf{X = 2A^{-1} + A}$.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A^t) = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego X = 2A^{-1} + A = $2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

(b)
Analiza el rango de la matriz A - mB, según los valores de m $\in$ R, siendo A la matriz del apartado anterior y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Tenemos (A - mB) = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - m\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+m & 0 \\ -m & 0 & 1-m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$.

Luego |A - mB| = 0 = $\begin{vmatrix} 1 & -1+m & 0 \\ -m & 0 & 1-m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{primera}\\ \text{fila}\end{matrix}$ = +(1)·(0 - m(1-m)) - (-1+m)·(-m-1+m) = m(-1+m)) + (-1+m) =
= (m+1)·(m-1).

De (m+1)·(m-1) = 0 tenemos m = 1 y m = -1.
Si **m ≠ -1 y m ≠ 1 tenemos |A - mB| ≠ 0 y rango(A - mB) = 3**.

Si **m = -1,** A - (-1)B = A + B = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **Como** $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ **= 0 + 2 = 2 ≠ 0, rango(A + B) = 2**.

Si **m = 1,** A - (1)B = A - B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **Como** $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ **= -1 - 0 = -1 ≠ 0, rango(A - B) = 2**.

6.- a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -2$, calcule justificadamente $\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

b) (1 punto) Comprueba que la matriz B es invertible y calcula su inversa, siendo $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución
(a)
Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -2$, calcule justificadamente $\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \text{(i)} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ -a+2 & -c+2 & -b+2 \end{vmatrix} = \text{(ii)} = (-1)\cdot(3/2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & z & y \\ -a+2 & -c+2 & -b+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \text{(iii)} = (-3/2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & z & y \\ -a & -c & -b \end{vmatrix} \text{(i)} + (-3/2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & z & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \text{(iv)} = (-1)\cdot(-3/2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & z & y \\ a & c & b \end{vmatrix} + (-3/2)\cdot 0 = (3/2)\cdot(-2) = 3.$$

Propiedades usadas:
(i) Si en un determinante cambiamos entre si dos filas (dos columnas) el determinante cambia de signo.
(ii) Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.

(iii) Si una fila (columna) un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el primer y segundo sumando respectivamente.
(iv) Si una fila (columna) de un determinante es proporcional a otra fila (columna) el determinante es cero.
(b)

Comprueba que la matriz B es invertible y calcula su inversa, siendo $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

B es invertible si $|B| \neq 0$.

Como $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} C_2+C_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila $= -(-1)\cdot(6 - 10) = -4 \neq 0$, existe $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}Adj(B^t)$.

$B^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $Adj(B^t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -5 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}Adj(B^t) = \dfrac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -5 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 5/4 & 3/4 & -3/4 \\ 5/4 & -1/4 & -3/4 \end{pmatrix}$.

7.- Dado el siguiente sistema: $\begin{cases} -x + 3y + z = 5 \\ 2x \quad + \quad az = -4 \\ 4x \quad - \quad 3z = a+1 \end{cases}$

a) (1 punto) Discute según los valores de $a \in R$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).
b) (1 punto) Resuelve el sistema para a = 1.

Solución

Dado el siguiente sistema: $\begin{cases} -x + 3y + z = 5 \\ 2x \quad + \quad az = -4 \\ 4x \quad - \quad 3z = a+1 \end{cases}$

(a)
Discute según los valores de $a \in R$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).

Sea $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & a & -4 \\ 4 & 0 & -3 & a+1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Tenemos $|A|=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda columna $= -(3)\cdot(-6 - 4a) = 13(a - 1)$.

De $|A| = 0$, tenemos $-6 - 4a = 0$, de donde $a = -6/4 = -3/2$.

Si $a \neq -3/2$, tenemos rango**(A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si $a = -3/2$, tenemos $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3/2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3/2 & -4 \\ 4 & 0 & -3 & -3/2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3/2 & -4 \\ 4 & 0 & -3 & -1/2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -1/2 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda columna$_1$ $= -(3)\cdot(-1 +16) = -45 \neq 0$, rango(A*) = 3.

Como rango**(A) = 2 $\neq$ rango(A*) = 3**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es incompatible y no tiene solución.**

(b)
Resuelve el sistema para a = 1.

Si a = 1, tenemos $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ya hemos visto en el apartado (a) que para a = 1 el sistema es compatible y determinado y tiene solución única. Lo resolvemos por Gauss (También se puede hacer por Cramer).

$\begin{cases} -x + 3y + z = 5 \\ 2x \quad + z = -4 \\ 4x \quad - 3z = 2 \; (E_3-2E_2) \end{cases} \approx \begin{cases} -x + 3y + z = 5 \\ 2x \quad + z = -4 \\ \quad - 5z = 10 \end{cases}$, de donde **z= -10/5 = -2**, entrando en la 2ª, 2x + (-2) = -4 → **x = -1** y entrando en la 1ª, -(-1) + 3y + (-2) = 5 resulta **y** = 6/3 **= 2.**

La solución del sistema es (x, y, z) = (-1, 2, -2).

8.- a) (1 punto) Escribe la ecuación del plano que contiene a las rectas r_1 y r_2, y además pasa por el punto (-1, 2, 1), siendo $r_1 \equiv \frac{x}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = \quad -2t \\ z = \quad t \end{cases}$.

b) (1 punto) Dado el vector **v** = (2, k, 2k), calcula el valor k ∈ R para que **v** y los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 sean linealmente dependientes.

Solución

(a)

Escribe la ecuación del plano que contiene a las rectas r_1 y r_2, y además pasa por el punto (-1, 2, 1), siendo

$r_1 \equiv \frac{x}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = \quad -2t \\ z = \quad t \end{cases}$.

Un vector director de r_1 es $\mathbf{u_1}$ = (3, 1, 1); un vector director de r_2 es $\mathbf{u_2}$ = (6, -2, 1). Vemos que $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ no son proporcionales, por tanto son independientes.

Para un plano π necesito un punto, el P(-1,2, 1), y dos vectores independientes, el $\mathbf{u_1}$ = (3,1,1) y el $\mathbf{u_2}$ = (6,-2,1) puesto que contiene a las rectas r_1 y r_2,.

La ecuación general del plano pedida es det(**PX**, $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$) = 0, siendo X(x,y,z) un punto genérico del plano.

$\pi \equiv \det(\mathbf{PX}, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}) = 0 = \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila}\end{matrix} = (x+1)\cdot(1+2) - (y-2)\cdot(3-6) + (z-1)\cdot(-6-6) =$

= 3x + 3y - 12z + 9 = 0 = x + y - 4z + 3 = 0.

(b)

Dado el vector **v** = (2, k, 2k), calcula el valor k ∈ R para que **v** y los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 sean linealmente dependientes.

Los vectores **v**, $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ son linealmente dependientes si su determinante es nulo.

Tenemos det(**v**, $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$) = 0 = $\begin{vmatrix} 2 & k & 2k \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} F_3-F_2 = \begin{vmatrix} 2 & k & 2k \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila}\end{matrix} = (3)\cdot(k-2k) - (-3)\cdot(2-6k) = -3k + 6 - 18k$

=

= -21k + 6 = 0, **de donde k = 6/21 = 2/7 para que los vectores v, $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ son linealmente dependientes.**

9.- a) (1 punto) Dados los siguientes vectores: $\mathbf{v_1} = a\mathbf{u_1} - 2\mathbf{u_2} + 3\mathbf{u_3}$, $\mathbf{v_2} = -\mathbf{u_1} + a\mathbf{u_2} + \mathbf{u_3}$, determina el valor del parámetro a ∈ R para que los vectores $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ sean ortogonales, sabiendo que los vectores {$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$} son ortogonales y de módulo igual a 1.

b) (1 punto) Calcula el volumen del tetraedro formado por los vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ y $\mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ siendo $\mathbf{v_1} = (1, 0, -2)$ y $\mathbf{v_2} = (3, 1, 0)$.

Solución

(a)

Dados los siguientes vectores: $\mathbf{v_1} = a\mathbf{u_1} - 2\mathbf{u_2} + 3\mathbf{u_3}$, $\mathbf{v_2} = -\mathbf{u_1} + a\mathbf{u_2} + \mathbf{u_3}$, determina el valor del parámetro $a \in R$ para que los vectores $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ sean ortogonales, sabiendo que los vectores $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ son ortogonales y de módulo igual a 1.

Como los vectores $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ son ortogonales y de módulo igual a 1, el producto escalar (•) de ellos verifica que $\mathbf{u_k} \bullet \mathbf{u_k} = 1$ (k = 1, 2, 3) y $\mathbf{u_i} \bullet \mathbf{u_j} = 0$ (con $i \neq j$ e i, j = 1, 2, 3).

Sabemos que para que los vectores $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ sean ortogonales si $\mathbf{v_1} \bullet \mathbf{v_2} = 0$.

Tenemos $\mathbf{v_1} \bullet \mathbf{v_2} = 0 = (a\mathbf{u_1} - 2\mathbf{u_2} + 3\mathbf{u_3},) \bullet (-\mathbf{u_1} + a\mathbf{u_2} + \mathbf{u_3},) = \{$aplicando $\mathbf{u_k} \bullet \mathbf{u_k} = 1$ y $\mathbf{u_i} \bullet \mathbf{u_j} = 0\} =$
$= -a - 2a + 3 = 0$, **de donde a = 1.**

(b)

Calcula el volumen del tetraedro formado por los vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ y $\mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ siendo $\mathbf{v_1} = (1, 0, -2)$ y $\mathbf{v_2} = (3, 1, 0)$.

Sabemos que el volumen de un tetraedro de vértices A, B, C y P es un sexto del volumen del paralelepípedo que determinan los vectores $\mathbf{v_1} = (1, 0, -2)$, $\mathbf{v_2} = (3, 1, 0)$ y $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} = (4, 1, -2)$, es decir un sexto del valor absoluto del producto mixto de los tres vectores: $V_{tetraedro} = \frac{1}{6} \cdot |[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1+v_2}]|$

$$\text{Tenemos } [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}_{F_3 - F_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{matrix} = (1)(-2+2) = 0.$$

El volumen pedido es V = (1/6)·|0| u^3 = 0 u^3, lo cual no debe de extrañarnos porque los vectores que forman el tetraedro han de ser linealmente independientes y v_3 depende linealmente de v_1 y v_2.

10.- El peso de los recién nacidos de una localidad, sigue una distribución normal de media 3300 gramos y desviación típica 465 gramos. Un recién nacido tiene bajo peso si su peso es inferior a 2500 gramos.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga bajo peso?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga un peso entre 3500 y 4000 gramos?

Solución

Si X es la variable "peso de los recién nacidos de una localidad", nos dicen que X sigue un normal $N(\mu, \sigma) = N(3300, 465)$.

(a)

¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga bajo peso?

Me piden p**(un recién nacido tenga bajo peso) = p(X ≤ 2500) =** {Tipificamos} = $p\left(Z \leq \frac{2500 - 3300}{465}\right) =$
$= p(Z \leq -1'72) = \{$suceso contrario$\} = 1 - p(Z \leq 1'72)$ **= 1 - 0'9573 = 0'0427.**

(b)

¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga un peso entre 3500 y 4000 gramos?

Me piden p**(un recién nacido pese entre 3500 y 4000 gramos) = p(3500 ≤ X ≤ 4000) =** {Tipificamos} =
$= p\left(\frac{3500 - 3300}{465} \leq Z \leq \frac{4000 - 3300}{465}\right) = p(0'43 \leq Z \leq 1'51) = p(Z \leq 1'51) - p(Z \leq 0'43)$ **=**
= 0'9345 - 0'6664 = 0'2681.